**Topologie des espaces vectoriels normés**

1. **Parties ouvertes et fermées**
2. **Parties ouvertes**

Définition : Une partie de est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

On dit aussi que est un ouvert de .

Exemples ⍟

1. et sont deux ouverts de

En effet,

Et

1. Dans muni de , soient , alors sont des ouverts de

Soit ,

Montrons que est une partie ouverte de . Soit

Posons alors

Soit , alors

Donc

Donc , donc est ouvert.

1. Montrons que dans l’espace vectoriel normé , la boule ouverte est une partie ouverte.

Soit

Objectif : construire tel que

Soit

Soit , montrons que

On a

Ainsi

1. Montrons que et ne sont pas des ouverts de .

Soit . Objectif : montrer que

Soit , posons où

Alors

Ainsi

Mais

Ainsi et ne sont pas des ouverts de

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d’ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d’ouverts est un ouvert

1. **Parties fermées**

Définition : Une partie de est dite fermée si son complémentaire (dans ) est un ouvert. On dit aussi que est un fermé de

Remarque : On n’utilisera jamais la notation pour désigner le complémentaire : elle désigne l’adhérence. On utilisera plutôt ou .

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de est un fermé de .

Propriété : Une union finie de fermés de est un fermé de .