**Topologie des espaces vectoriels normés**

1. **Parties ouvertes et fermées**
2. **Parties ouvertes**

Définition : Une partie de est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

On dit aussi que est un ouvert de .

Exemples ⍟

1. et sont deux ouverts de

En effet,

Et

1. Dans muni de , soient , alors sont des ouverts de

Soit ,

Montrons que est une partie ouverte de . Soit

Posons alors

Soit , alors

Donc

Donc , donc est ouvert.

1. Montrons que dans l’espace vectoriel normé , la boule ouverte est une partie ouverte.

Soit

Objectif : construire tel que

Soit

Soit , montrons que

On a

Ainsi

1. Montrons que et ne sont pas des ouverts de .

Soit . Objectif : montrer que

Soit , posons où

Alors

Ainsi

Mais

Ainsi et ne sont pas des ouverts de

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d’ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d’ouverts est un ouvert

1. **Parties fermées**

Définition : Une partie de est dite fermée si son complémentaire (dans ) est un ouvert. On dit aussi que est un fermé de

Remarque : On n’utilisera jamais la notation pour désigner le complémentaire : elle désigne l’adhérence. On utilisera plutôt ou .

**Exemples ⍟**

1. est un fermé de car est un ouvert de

E est un fermé de car est un ouvert de

1. Dans muni de , avec , et sont des fermés de .

En effet, est un ouvert de en tant qu’union d’ouverts de .

1. Dans est un fermé de . On va montrer que est un ouvert de .

Soit , posons , alors car .

Soit , montrons que

Supposons par l’absurde que ie

Alors Absurde.

Ainsi , d’où

Donc est un ouvert de

Remarque : Il existe certains ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés. ()

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de est un fermé de .

Propriété : Une union finie de fermés de est un fermé de .

Remarque : on peut prendre et considérer , pas un fermé de .

Propriété : (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie de est fermée si et seulement si, pour toute suite d’éléments de qui converge, la limite appartient à , ie :

Attention : Pour autant, toutes les suites dans un fermé ne convergent pas !

Propriété :

Si sont des fermés des espaces normés alors est une partie fermée de l’espace vectoriel normé produit .