**Topologie des espaces vectoriels normés**

1. **Parties ouvertes et fermées**
2. **Parties ouvertes**

Définition : Une partie de est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

On dit aussi que est un ouvert de .

Exemples ⍟

1. et sont deux ouverts de

En effet,

Et

1. Dans muni de , soient , alors sont des ouverts de

Soit ,

Montrons que est une partie ouverte de . Soit

Posons alors

Soit , alors

Donc

Donc , donc est ouvert.

1. Montrons que dans l’espace vectoriel normé , la boule ouverte est une partie ouverte.

Soit

Objectif : construire tel que

Soit

Soit , montrons que

On a

Ainsi

1. Montrons que et ne sont pas des ouverts de .

Soit . Objectif : montrer que

Soit , posons où

Alors

Ainsi

Mais

Ainsi et ne sont pas des ouverts de

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d’ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d’ouverts est un ouvert

1. **Parties fermées**

Définition : Une partie de est dite fermée si son complémentaire (dans ) est un ouvert. On dit aussi que est un fermé de

Remarque : On n’utilisera jamais la notation pour désigner le complémentaire : elle désigne l’adhérence. On utilisera plutôt ou .

**Exemples ⍟**

1. est un fermé de car est un ouvert de

E est un fermé de car est un ouvert de

1. Dans muni de , avec , et sont des fermés de .

En effet, est un ouvert de en tant qu’union d’ouverts de .

1. Dans est un fermé de . On va montrer que est un ouvert de .

Soit , posons , alors car .

Soit , montrons que

Supposons par l’absurde que ie

Alors Absurde.

Ainsi , d’où

Donc est un ouvert de

Remarque : Il existe certains ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés. ()

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de est un fermé de .

Propriété : Une union finie de fermés de est un fermé de .

Remarque : on peut prendre et considérer , pas un fermé de .

Propriété : (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie de est fermée si et seulement si, pour toute suite d’éléments de qui converge, la limite appartient à , ie :

Attention : Pour autant, toutes les suites dans un fermé ne convergent pas !

Exemple :

Mq est un fermé de .

Comme toutes les normes sur sont 2 à 2 équivalentes.

Soit une suite d’éléments de qui converge vers . Mq .

Par caractérisation de la convergence dans un ev de dimension finie, si on note alors les suites correspondent aux suites coordonnées de dans la base canonique de , ainsi :

Or donc . Ainsi donc .

**Exemple :** ⍟

Soit un evn. Soit et . Montrons que est un fermé de .

Soit une suite d’éléments de qui converge vers (dans ).

, ie

Essayons de montrer que

On a

Ainsi . En faisant tendre vers dans la première inégalité, il vient :

Ainsi par caractérisation séquentielle des fermés, est un fermé de .

De même, est un fermé de (même preuve en remplaçant les par .

Propriété :

Si sont des fermés des espaces normés alors est une partie fermée de l’espace vectoriel normé produit .

Exemple : Dans est un fermé de en tant que produit cartésien de fermés de

**Intérieur**

Définition : Un élément est dit **intérieur** à une partie si est un voisinage de ie si :

L’intérieur de , noté est l’ensemble de tous les points intérieurs à , c’est-à-dire :

Propriété : Une partie est dite ouverte ssi

Exemple :

Propriété : Soit , alors est la réunion de tous les ouverts inclus dans . Par conséquent, est le plus grand ouvert (au sens de l’inclusion) inclus dans .

**Adhérence**

Propriété : On dit qu’un élément est **adhérent** à une partie si :

On appelle **adhérence** de l’ensemble des éléments adhérents à .

Propriété : Soit une partie de , alors

Propriété :

Une partie est fermée si et seulement si

Propriété : Soit une partie de . Alors est l’intersection de tous les fermés contenant . Par conséquent, est le plus petit fermé (au sens de l’inclusion) contenant .

Propriété :

Soient une partie de et . On a équivalence entre :

* est adhérent à
* Il existe une suite d’éléments de qui converge vers .

Exemple : est adhérent à

Posons alors (car )

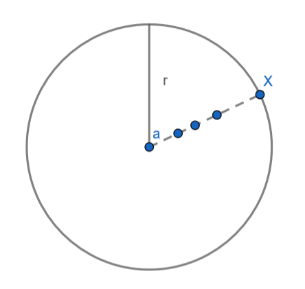
Soit une norme sur (comme toutes les normes sur sont deux à deux équivalentes. Alors

Ainsi converge vers , donc .

Exemple : ⍟

Soient un evn, et .

On va montrer que

* On a vu que est un fermé contenant donc par la propriété 2.7,
* On a , or . Reste donc à montrer que

Soit on va construire une suite d’éléments de qui converge vers

Posons et

Alors

Ainsi

Enfin, , ie . Donc , ce qui amène à l’inclusion voulue.

Propriété : On appelle **frontière** d’une partie de l’ensemble .

**Densité**

Définition : Une partie de est dite **dense** si .

Propriété : Soit une partie de . On a équivalence entre :

* est une partie dense de .
* .

Exemple : est dense dans .

Soit

But : Construire une suite tq

* Si est inversible, on prend la suite constante égale à
* Sinon, donc

Posons ,

On a , donc

Cmme toutes les matrices sont trigonalisables dans , et car est non inversible, il existe et triangulaire supérieure tq , avec

Donc

Posons

Aloors tq

Donc , alors

Alors tq et

Donc

Ainsi est dense dans .

**Parties compactes**

Définition :

Soit une suite d’éléments de . On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de toute suite de la forme , où est une application strictement croissante.

Théorème : Soit une suite d’éléments de . Si converge vers , alors toute suite extraite de converge également vers .

Définition :

Une partie de est dite compacte si toute suite d’éléments de possède une sous-suite convergente dans , i.e.

strictement croissante,

On dit aussi que est un compact de .

Propriété :

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Remarque : Si , alors on a équivalence :

compact fermé et borné

Théorème :

Si est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire : (Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une suite extraite convergente